Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Xianghui Zhong
Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Wir betrachten in dieser Aufgabe den Spezialfall des Paging-Problems, in dem es insgesamt nur $k+1$ viele verschiedene Seiten $0, 1, \dots, k$ gibt. Wir untersuchen den Online-Algorithmus A, der bei einem Seitenfehler bei einem Zugriff auf Seite i die Seite $(i+1) \bmod (k+1)$ verdrängt.

(a) Handelt es sich bei A um einen Markierungsalgorithmus? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass A k-kompetitiv ist.

Aufgabe 9.2

Analog zu Algorithmus A aus Aufgabe 9.1 (im Folgenden als A_1 bezeichnet) können wir auch einen Online-Algorithmus A_{-1} definieren, der bei einem Seitenfehler beim Zugriff auf Seite i des Hauptspeichers die Seite $(i-1) \bmod (k+1)$ aus dem Cache entfernt.
Der randomisierte Online-Algorithmus ALG arbeitet folgendermaßen: Zu Beginn wird mit Wahrscheinlichkeit jeweils $\frac{1}{2}$ entweder Algorithmus A_1 oder Algorithmus A_{-1} ausgewählt. Dann wird der ausgewählte Algorithmus benutzt.
Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus $(k+3)/2$-kompetitiv ist.

Aufgabe 9.3

Der Beweis von Theorem 2.12 verwendet eine Sequenz σ, die auf $k+m$ paarweise verschiedene Seiten zugreift. Um zu zeigen, dass RANDOM für kein $r < k$ einen kompetitiven Faktor von r erreicht, muss dafür m beliebig groß gewählt werden dürfen. Damit bleibt offen, welchen kompetitiven Faktor RANDOM auf Sequenzen besitzt, die nur auf eine beschränkte Anzahl an verschiedenen Seiten zugreifen.

Modifizieren Sie den Beweis von Theorem 2.12 so, dass die verwendete Sequenz σ nur auf $k+1$ paarweise verschiedene Seiten zugreift.

Aufgabe 9.4

Im Beweis von Theorem 2.14 wird gezeigt, dass kein randomisierter Online-Algorithmus einen besseren kompetitiven Faktor als H_k erreicht, nicht einmal auf Sequenzen, die nur auf $k+1$ verschiedene Seiten zugreifen.

Zeigen Sie, dass MARK auf solchen Sequenzen H_k-kompetitiv (und damit ein optimaler randomisierter Online-Algorithmus auf solchen Sequenzen) ist.