Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2019/20

UNIVERSITÄT BONN

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt
Xianghui Zhong
Institut für Informatik

Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

(a) Geben Sie eine zusätzliche Bedingung für die Potentialfunktion in Theorem 2.9 an, aus welcher strikte Kompetitivität folgt.

(b) Folgern Sie, für welche Start-Konfigurationen der Server der DC-Algorithmus auf Bäumen strikt k-kompetitiv ist.

Aufgabe 12.2

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit positiven Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Zeigen Sie: Jeder Spannbaum T liefert eine dominante Metrik d_T für die durch G induzierte Metrik d.

(b) Sei s_T der Streckungsfaktor einer Baummetrik d_T gegenüber der induzierten Metrik d. Geben Sie einen $s_T \cdot k$-kompetitiven Algorithmus für das k-Server Problem auf G an (und beweisen Sie dessen kompetitiven Faktor).

(c) Sei $T = (V, E_T)$ ein minimaler Spannbaum von G. Zeigen Sie, dass $s_T \leq N - 1$ gilt, wobei $N = |V|$ gilt.

Aufgabe 12.3

Sei $n = a^2$ für eine natürliche Zahl a. Wir betrachten den metrischen Raum $\mathcal{M} = (M, d)$ mit $M = \{1, \ldots, a\} \times \{1, \ldots, a\}$ und $d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

(a) Geben Sie einen $k \cdot (a + 1)$-kompetitiven deterministischen Online-Algorithmus für das k-Server-Problem auf dem metrischen Raum $\mathcal{M}$ an.

(b) Geben Sie einen $k \cdot \left(\frac{a}{2} + 1\right)$-kompetitiven randomisierten Online-Algorithmus für das k-Server-Problem auf dem metrischen Raum $\mathcal{M}$ an.

Aufgabe 12.4

Wir betrachten metrische Räume $\mathcal{M} = (M, d)$, für die $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge ist und die Metrik d folgende Eigenschaft besitzt: Für je drei Punkte $x, y, r \in M$, die auf einer Geraden liegen, wobei y zwischen x und r liegt, und einen beliebigen Punkt $p \in M$ folgt aus $d(x, p) \leq d(r, p)$, dass auch $d(y, p) \leq d(r, p)$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem euklidischen Abstand, ein solcher Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass der $\mathrm{SC}_{\frac{1}{2}}$-Algorithmus 3-kompetitiv für das 2-Server-Problem in jedem solchen metrischen Raum $\mathcal{M}$ ist.