

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Wir betrachten in dieser Aufgabe das Maximum- k -Cut Problem: Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit nicht-negativen Gewichten $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das Ziel ist es, eine Partitionierung $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ zu finden, die das Gewicht der Kanten mit Endpunkten in verschiedenen Mengen maximiert. Geben Sie für das Maximum- k -Cut Problem einen Approximationsalgorithmus mit Approximationssfaktor $\frac{k-1}{k}$ an.

Aufgabe 5.2

In einer Quiz-Show können drei Teilnehmer eine Reise nach Hawaii gewinnen, wenn sie das folgende Spiel gewinnen: Jeder Teilnehmer bekommt unabhängig und uniform zufällig entweder einen roten oder einen grünen Hut. Er kann die Farbe seines eigenen Huts nicht sehen, aber die Farbe der anderen Hüte. Ohne untereinander zu kommunizieren muss nun jeder der Kandidaten entweder „rot“, „grün“, oder „Unbekannt“ auf einem Zettel notieren. Die drei Kandidaten gewinnen, wenn mindestens einer der Kandidaten „rot“ oder „grün“ notiert hat und zusätzlich alle Kandidaten, die eine Farbe notiert haben, die Farbe ihres eigenen Huts notiert haben. Geben Sie eine Strategie an, die eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 50% garantiert. Gibt es eine bessere Strategie?

Aufgabe 5.3

Als Zeichen seines guten Willens lässt ein Gefängnisdirektor an seinem Geburtstag die Insassen mit den Nummern 1 bis 100, die wegen geistiger Untätigkeit zu einer Woche Dauerarrest verurteilt wurden, zu sich bringen und schlägt ihnen folgendes Spiel vor: In einem Raum befinden sich 100 geschlossene Boxen, die jeweils eine der Zahlen 1 bis 100 enthalten. Diese wurden gemäß einer zufälligen Permutation von $1, \dots, 100$ den Boxen zugeordnet, wobei jede Permutation gleichwahrscheinlich war. Die Gefangenen sollen nun nacheinander den Raum betreten, je 50 Boxen öffnen, anschließend alle Boxen wieder verschließen und den Raum verlassen. Es dürfen nie zwei Gefangene gleichzeitig im Raum sein. Wenn jeder Insasse seine eigene Nummer gefunden hat, werden alle Insassen frühzeitig entlassen. Ansonsten muss jeder seinen Arrest absitzen.

Die Gefangenen dürfen sich, bevor der erste den Raum betritt, auf eine gemeinsame Strategie einigen. Anschließend dürfen keine Informationen mehr ausgetauscht werden. Geben Sie eine Strategie an, mit der die Gefangenen mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \ln 2 \approx 0.31$ freikommen.

Aufgabe 5.4

- Geben Sie zu einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ ein ganzzahliges LP an, dessen optimale Lösung ein optimales Vertex Cover für G liefert.
- Entwerfen Sie aus dem relaxierten LP einen 2-Approximationsalgorithmus für das Vertex-Cover-Problem. Beweisen Sie dessen Korrektheit.