Prof. Dr. Heiko Röglin
Alexander Göke
Dr. Andreas Tönnis
Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1

Wir betrachten erneut den lokalen Suchalgorithmus für Maximum-Cut aus Aufgabe 3.3. Anstatt jede lokale Verbesserung zuzulassen, führen wir nur jene Verbesserungen durch, die den aktuellen Schnitt um mindestens einen Faktor $(1 + 2\frac{\varepsilon}{n})$ verbessern:

Algorithm 1 LocalImprovement

$S := \emptyset$
while $\exists v \in V : w(S\Delta v) > (1 + 2\frac{\varepsilon}{n})w(S)$ **do**
  $S := S\Delta v$
end while
return $(S, V \setminus S)$

Zeigen Sie, dass dieser Algorithmus für $\varepsilon > 0$ stets eine $\frac{1}{2+\epsilon}$-Approximation liefert und die Laufzeit durch ein Polynom in n, $\frac{1}{\varepsilon}$ und $\log W$ beschränkt werden kann, wobei W die Summe der Kantengewichte bezeichnet.

Aufgabe 9.2

Geben Sie eine LP-Formulierung für das Minimale Spannbaum Problem an, welche ein möglichst kleines Integrality Gap aufweist.

Aufgabe 9.3

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißt eine Menge $F \subseteq V$ Feedback Vertex Set, falls der Graph $G - F$ ein Wald ist (also keine Kreise enthält). Das Feedback Vertex Set Problem fragt nun für einen gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und eine Gewichtsfunktion $w : V \to \mathbb{R}_{>0}$ nach einem Feedback Vertex Set F für den Graphen G welches $w(F)$ minimiert.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Feedback Vertex Set F gilt

$$\sum_{v \in F} (d(v) - 1) \geq |E| - |V| + 1,$$

wobei $d(v)$ den Grad des Knotens v in G bezeichnet.

(b) Definiere nun für $S \subseteq V$ die Funktion $h(S) = |E(G[S])| - |S| + 1$. Zeigen Sie, dass es sich bei Folgendem um eine ILP Formulierung für das Feedback Vertex Set Problem handelt:

$$\begin{array}{lll} \text{min} & \sum_{v \in V} w_v x_v & \\ \text{so dass} & \sum_{v \in S} \left(d_{G[S]}(v) - 1\right) x_v \geq h(S) & \forall S \subseteq V \\ & x_v \in \{0, 1\} & \forall v \in V \end{array}$$