Prof. Dr. Heiko Röglin
Alexander Göke
Dr. Andreas Tönnis
Institut für Informatik

# Übungsblatt 8

## Aufgabe 8.1

Wir betrachten den Algorithmus LocalMDST aus der Vorlesung ohne die Einschränkung, dass nur Knoten $v$ betrachtet werden, die einen Grad zwischen $\Delta(T) - \ell$ und $\Delta(T)$ haben.

(a) Zeigen Sie, dass der Algorithmus auch ohne diese Einschränkung in endlicher Zeit terminiert.

(b) Zeigen Sie, dass lokale Optima im Allgemeinen nicht global optimal sind.

## Aufgabe 8.2

Betrachten Sie den lokalen Suchalgorithmus für das Problem Facility Location und konstruieren Sie für jedes $\varepsilon > 0$ eine Instanz mit einem lokalen Optimum, das um mindestens den Faktor $3 - \varepsilon$ schlechter ist als die optimale Lösung.

## Aufgabe 8.3

Wir werden in dieser Aufgabe einen Approximationsalgorithmus für Max-SAT mit einem Approximationsfaktor $\frac{3}{4} + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ herleiten. Für eine Instanz von Max-SAT mit Aussagenvariablen $x_1, \ldots, x_n$, Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ und Gewichten $w_1, \ldots, w_m \geq \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir ein Programm, welches reelle Variablen $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{R}$ und zusätzlich Vektorvariablen $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt. Wir nutzen die Notation aus den Abschnitten 5.1 und 6.3 im Skript und wir bezeichnen mit $u(C_j)$ die relaxierte Version von $v(C_j)$ aus Abschnitt 6.3, d. h.

$$u(x_i) = \frac{1 + v_0 v_i}{2}, \quad u(\neg x_i) = \frac{1 - v_0 v_i}{2}, \quad u(x_i \vee x_j) = \frac{1 + v_0 v_i}{4} + \frac{1 + v_0 v_j}{4} + \frac{1 - v_i v_j}{4} \quad \text{etc.}$$

Wir betrachten das folgende Programm:

$$\begin{aligned}
\text{maximiere} \quad & \sum_{j=1}^{m} w_j z_j \\
\text{sodass} \quad & \sum_{i \in P_j} u(x_i) + \sum_{i \in N_j} u(\neg x_i) \geq z_j, && \forall j \in \{1, \ldots, m\}, \\
& u(C_j) \geq z_j, && \forall j \in \{1, \ldots, m\}, |C_j| = 2, \\
& v_i \cdot v_i = 1, && \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \\
& v_i \in \mathbb{R}^{n+1}, && \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \\
& 0 \leq z_j \leq 1, && \forall j \in \{1, \ldots, m\}.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Variablenbelegung der Instanz von Max-SAT in eine Lösung dieses Programms übersetzt werden kann, deren Zielfunktionswert mit dem Gewicht der erfüllten Klauseln übereinstimmt.

(b) Zeigen Sie, dass das Programm in polynomieller Zeit gelöst werden kann.

(c) Wir runden eine Lösung für das Programm wie in Abschnitt 6.3 zu einer Belegung der Aussagenvariablen. Zeigen Sie, dass dann jede Klausel $C_j$ der Länge 1 oder 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\alpha u(C_j) \geq \alpha z_j \approx 0{,}878 z_j$ erfüllt ist.

(d) Wir betrachten nun den Algorithmus BestOfThree. Dieser führt für die gegebene Instanz von Max-SAT mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_1$ den Algorithmus RandMaxSAT, mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_2$ das randomisierte Runden aus Abschnitt 5.1 und mit einer Wahrscheinlichkeit von $p_3$ das Runden aus (c) aus. Wählen Sie $p_1$, $p_2$ und $p_3$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ so, dass der Algorithmus BestOfThree einen Approximationsfaktor größer als $\frac{3}{4}$ erreicht. Welcher Faktor kann erreicht werden?