Randomisierte und Approximative Algorithmen
Wintersemester 2018/19

Besprechung: KW 42

Prof. Dr. Heiko Röglin
Alexander Göke
Dr. Andreas Tönnis
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

(a) Zeigen Sie, dass in Bäumen immer ein optimales Vertex Cover existiert, das keine Blätter enthält.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Geben Sie einen Algorithmus an, der ein optimales Vertex Cover für G in Laufzeit $O(|V|)$ berechnet, und beweisen Sie dessen Korrektheit.

Aufgabe 1.2

Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Der folgende Algorithmus berechnet ein Vertex Cover für G.

Algorithm 1 Vertex Cover

```
C := ∅; G' := G;
while E(G') ≠ ∅ do
    Wähle den Knoten v ∈ V(G') mit maximalem Grad in G'.
    C = C ∪ {v};
    Lösche v und alle inzidenten Kanten aus G'.
end while
```

Zeigen Sie eine obere und untere Schranke für den Approximationsfaktor dieses Algorithmus in Abhängigkeit von $|V|$.

Aufgabe 1.3

Beim Bin-Packing-Problem ist eine Folge $s_1, \dots, s_n \in (0, 1]$ von Objektgrößen gegeben. Gesucht ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, für die eine Zuordnung $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$ existiert, sodass

$$\sum_{f(i)=j} s_i \leq 1$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt.
Geben Sie einen Greedy-Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ und Approximationsfaktor 2 für das Bin-Packing-Problem an. Geben Sie einen Beweis für den erreichten Approximationsfaktor an.

Aufgabe 1.4

Beim k-Center-Problem ist eine Menge $P \subset \mathbb{R}^d$ von Punkten gegeben. Gesucht ist das minimale $r \in \mathbb{R}$, sodass es k Zentren $c_1, \dots, c_k \in P$ mit $P \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_r(c_i)$ gibt, wobei $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x - c||_2 \leq r\}$. Finden Sie einen Approximationsalgorithmus mit Approximationsfaktor 2. Geben Sie einen Beweis für den erreichten Approximationsfaktor an.

Tipp: Wählen Sie zunächst ein Zentrum. Wählen Sie davon ausgehend schrittweise weitere Zentren.