Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Randomisierte und approximative Algorithmen
Wintersemester 2017/18
Besprechung: KW 48

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Sei G ein Multigraph. Beweisen Sie, dass für G genau dann ein Eulerkreis existiert, wenn alle Knoten in G geraden Knotengrad haben.

Aufgabe 6.2

Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende, ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit positiven Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Metrik auf V induziert.

Aufgabe 6.3

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit Kantengewichten $w : E \to \mathbb{R}$. Der folgende Algorithmus ist unter dem Namen Prims Algorithmus bekannt und berechnet einen Spannbaum in G:

Algorithm 1 Prims Algorithmus

$V_T := \emptyset, E_T = \emptyset$.
while Es gibt $v \in V \setminus V_T$ **do**
  Wähle eine minimale Kante $e' = (v', w')$ unter allen Kanten $e = (v, w)$ mit $v \in V_T$ und $w \in V \setminus V_T$.
  Setze $V_T = V_T \cup \{w'\}$ und $E_T = E_T \cup \{e'\}$.
end while
return (V_T, E_T).

Beweisen Sie, dass (V_T, E_T) ein minimaler Spannbaum in G ist.

Aufgabe 6.4

Gegeben sei eine Metrik (V, d). Wir betrachten einen Algorithmus für das metrische TSP-Problem:

Algorithm 2 NearestInsertion

Starte mit einem Kreis C_1, der nur aus einem beliebigen Knoten $v \in V$ besteht.
Finde den zu v nächstgelegenen Knoten u. C_2 sei der Kreis der nur v und u enthält.
for $j = 3$ **to** $|V|$ **do**
  Wähle einen Knoten $v_j \notin C_{j-1}$, der den geringsten Abstand zu einem Knoten in C_{j-1} hat.
  Wähle eine Kante (u, w) aus C_{j-1} aus, sodass $d(u, v_j) + d(v_j, w) - d(v, w)$ minimal ist.
  Füge den Knoten v_j zwischen u und w in C_{j-1} ein und erhalte so C_j.
end for
return C_n.

Beweisen Sie, dass der Algorithmus eine 2-Approximation liefert.