Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

(a) Zeigen Sie, dass in Bäumen immer ein optimales Vertex Cover existiert, welches keine Blätter enthält.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher ein optimales Vertex Cover auf G mit Laufzeit $O(|V|)$ berechnet und beweisen Sie dessen Korrektheit.

Aufgabe 1.2

Es sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Der folgende Algorithmus berechnet ein Vertex Cover auf G.

Algorithm 1 Vertex Cover

$C := \emptyset$, $G' = G$.
while $E(G') \neq \emptyset$ **do**
  -Wähle den Knoten $v \in V(G')$ mit maximalem Grad in G'.
  -$C = C \cup \{v\}$
  -Lösche v und alle inzidenten Kanten aus G'.
end while

Argumentieren Sie eine obere und untere Schranke für den (asymptotischen) Approximationsfaktor des Algorithmus.

Aufgabe 1.3

Das Bin-Packing-Problem ist wie folgt definiert: Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Folge von Elementen und jedes Element habe eine Größe $s(a_i) \in (0, 1]$. Finde die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$ für die eine Zuordnung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ existiert, sodass für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt $\sum\limits_{f(i)=j} s(i) \leq 1$.
Geben Sie einen Greedy-Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ und Approximationsfaktor 2 an und beweisen Sie diesen.

Aufgabe 1.4

Betrachte eine endliche Menge von Punkten $P \subset \mathbb{R}^n$. Beim k-Center-Problem suchen wir ein minimales $r \in \mathbb{R}$, sodass es k Zentren $c_1, \ldots, c_k$ gibt mit $P \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_r(c_i)$, wobei $B_r(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - c||_2 \leq r\}$. Finden Sie einen Approximationsalgorithmus mit Approximationsfaktor 2 und beweisen Sie diesen.

Tipp: Wählen Sie zunächst ein Zentrum. Wählen Sie davon ausgehend schrittweise weitere Zentren.