Algorithmen und
Berechnungskomplexität I
Wintersemester 2016/17

Abgabe: 08.11.2016, 12.30 Uhr

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1: (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir uns auf die Laufzeitanalyse von BinarySearch konzentriert. Nichtsdestotrotz spielen Korrektheitsbeweise in der Algorithmik eine wichtige Rolle.

Beweisen Sie, dass BinarySearch korrekt ist.

Aufgabe 3.2: (2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Rekursionsgleichungen für $T(n)$ mit $T(2) = T(1) = 1$ eine möglichst einfache Funktion $g(n)$ mit $T(n) = \Theta(g(n))$.

(a) $T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^{1+1/n}$,

(b) $T(n) = 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2^n$,

(c) $T(n) = 3 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \frac{n^2 \log_2(n)}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 3.3: (2+2+2 Punkte)

Seien $(a_n, \ldots, a_1)$ und $(b_n, \ldots, b_1)$ die Binärdarstellungen zweier natürlicher Zahlen a und b der Länge n, wobei n eine Zweierpotenz ist. Wir wollen die Binärdarstellung $(c_{2n}, \ldots, c_1)$ des Produktes $c = a \cdot b$ bestimmen.

(a) Geben Sie die Laufzeit der klassischen Schulmethode zur Multiplikation von a und b an.

(b) Geben Sie einen Divide-and-Conquer-Algorithmus zur Multiplikation von a und b an, der mit vier Multiplikationen von Zahlen der Länge $n/2$ auskommt. Welche Laufzeit hat diese Methode?

(c) Geben Sie einen Divide-and-Conquer-Algorithmus zur Multiplikation von a und b an, der mit drei Multiplikationen von Zahlen der Länge $n/2$ auskommt. Welche Laufzeit hat diese Methode?

Aufgabe 3.4: (3+3 Zusatzpunkte)

(a) Betrachten Sie die Rekursionsgleichung $T(1) = 1$ und $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor n/2 \rfloor) + \gamma(n) \cdot n^2$ für $n \geq 2$, wobei $\gamma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die folgende Funktion ist:

$$\gamma(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ 2 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Bestimmen Sie eine möglichst einfache Funktion $g(n)$ mit $T(n) = \Theta(g(n))$.

(b) Bestimmen Sie für die Rekursionsgleichung $T(2) = 1$ und $T(n) = 4 \cdot T(\sqrt{n}) + \log_2(n)$ für $n \geq 3$ eine möglichst einfache Funktion $h(n)$ mit $T(n) = \Theta(h(n))$. Ignorieren Sie der Einfachheit halber Rundungsprobleme in der Analyse und beschränken Sie sich auf Zweierpotenzen n.