Thomas Kesselheim
Alexander Braun

23. Juni 2022
Abgabe: 29. Juni 2022, 9:00 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2022

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir das k-Center Problem kennengelernt und gezeigt, dass der Gonzales Algorithmus eine Lösung berechnet, welche höchstens doppelt so teuer wie eine optimale Lösung ist. Das k-Supplier Problem ist eine Verallgemeinerung vom k-Center Problem: Gegeben eine Menge $X = P \cup F$, einer Metrik d auf X und einer Menge $S = \{x_1, ..., x_m\} \subseteq P$ sollen wir nun eine Menge von Zentren $f_1, ..., f_k \in F$ finden, welche die Zielfunktion

$$\phi_{\text{supplier}}(f_1, ..., f_k) = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq k} d(x_i, f_j)$$

minimiert.
Nutzen Sie den Gonzales-Algorithmus und leiten Sie einen Approximationsalgorithmus für das k-Supplier Problem her.

Aufgabe 2: (3+2 Punkte)

Wir möchten zeigen, dass Lloyds Algorithmus terminiert.

(a) Zeigen Sie, dass der Wert der Zielfunktion in jedem Durchlauf, in dem der Algorithmus nicht terminiert, kleiner wird.

(b) Argumentieren Sie mithilfe von (a), dass der Algorithmus nach spätestens k^m Durchläufen der äußeren Schleife terminiert.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Finden Sie eine Instanz $S \subset \mathbb{R}^2$, auf der Lloyds Algorithmus mit Wahrscheinlichkeit echt größer 0 eine beliebig schlechte Lösung berechnet.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das k-Center Problem NP-schwer ist. Nutzen Sie dazu eine Reduktion von *Dominating Set*, welches wie folgt definiert ist: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, ungewichteter Graph. Eine Menge $D \subseteq V$ ist eine *dominierende Menge* in G, wenn für jeden Knoten $u \in V$ entweder $u \in D$ ist oder es einen Knoten $v \in D$ gibt mit $\{u, v\} \in E$. Das *Dominating Set Problem* ist nun zu entscheiden, ob für einen Graph G und $k \in \mathbb{N}$ eine dominierende Menge mit Kardinalität höchstens k existiert.