Thomas Kesselheim
Alexander Braun

12. Mai 2022
Abgabe: 18. Mai 2022, 9:00 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2022

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir haben in der Vorlesung zwei verschiedene Definitionen für die Konvexität von f kennengelernt:

(i) $\forall u, v \in \mathbb{R} : f(u) \geq f(v) + f'(v)(u - v)$

(ii) $\forall u, v \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] : f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$

Zeigen Sie, dass (ii) aus (i) folgt.

Aufgabe 2: (2+2+2 Punkte)

Untersuchen Sie Abschlusseigenschaften der Konvexität in Bezug auf folgende Funktionen. $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) $h(x) = \min(f(x), g(x))$

(b) $h(x) = \max(f(x), g(x))$

(c) $h(x) = g(f(x))$.

Angenommen, f und g sind konvex, ist dann auch h konvex? Beweisen Sie ihre Anwort.

Aufgabe 3: (1+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine konvexe Funktion ist.

(b) Geben Sie die Menge der Subgradienten für $x = 0$ an.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Uns sind Punkte in der Ebene $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ gegeben, die wir durch eine Gerade beschreiben wollen. Sei die Gerade durch ihre Steigung a und Achsenabschnitt b parametrisiert. Zeigen Sie, dass die Funktion der Summe der Fehlerquadrate $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(a, b) = \sum_{i=1}^{m}(ax_i + b - y_i)^2$ konvex ist.
Hinweis: Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannten Abschlusseigenschaften.

Aufgabe 5: (3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$ und $w \in \mathbb{R}^d$. Für $1 \leq i \leq d$ sei $v^{(i)}$ der Vektor mit $2dw_i$ an der i-ten Koordinate und 0 an allen anderen Koordinaten.
Wir betrachten die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{D}$ welche gleichverteilt aus $v^{(1)}, \ldots, v^{(d)}$ zieht. Zeigen Sie, dass für g gezogen aus $\mathcal{D}$ gilt $\mathbf{E}[g] = \nabla f(w)$.