Thomas Kesselheim
Alexander Braun

07. April 2022
Abgabe: 13. April 2022, 9:00 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2022

Übungsblatt 1

Die Abgabe Ihrer Lösung erfolgt in Gruppen von bis zu drei Studierenden. Bitte laden Sie ihre Lösung vor der Abgabefrist als PDF in eCampus in den dafür vorgesehenen Ordner hoch. Hierbei sollte die Lösung einer Gruppe nur von einem Studierenden hochgeladen werden. Bitte beachten Sie, auf der Abgabe alle Namen und Mailadressen der Studierenden einer Gruppe zu notieren, da sonst keine ordnungsgemäße Vergabe der erzielten Punkte erfolgen kann.

Dieses Übungsblatt wird in den Tutorien am 14. April besprochen.

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei für eine Hypothese $h\colon \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$, $h(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in [2, 4]$. Berechnen Sie den tatsächlichen Fehler $\mathrm{err}_{\mathcal{D},f}(h)$ unter der Annahme, dass für Grundwahrheit f gilt, dass $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in [1, 3]$ und, dass die Verteilung $\mathcal{D}$ durch die Dichtefunktion $g(x) = e^{-x}$ für $x \geq 0$ und $g(x) = 0$ für $x < 0$ gegeben ist.

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Betrachten Sie den Hypothesenraum $\mathcal{H}$, in der jede Funktion $h_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ durch ein *offenes* Intervall (a, b) definiert ist und $h_{a,b}(x) = 1$ genau dann wenn $x \in (a, b)$. Für den Fall, dass $a = b$, definieren wir, dass $(a, b) = \emptyset$ gilt. Betrachten Sie den folgenden Lernalgorithmus.

1. Falls das Sample S kein Element (x_i, y_i) mit $y_i = 1$ enthält, gibt der Lernalgorithmus die konstante Funktion $x \mapsto -1$ für all $x \in \mathbb{R}$ zurück.

2. Für ein Sample $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\}$ gibt der Lernalgorithmus die Funktion $h_{a',b'}$ zurück, die wie folgt definiert ist. Der Wert a' ist das größte x_i, sodass $y_i = -1$ und $x_i < x_j$ für ein $y_j = 1$. Falls dieses nicht existiert, ist $a' = -\infty$. Der Wert b' ist das kleinste x_i, sodass $y_i = -1$ und $x_i > x_j$ für ein $y_j = 1$. Falls dieses nicht existiert, ist $b' = \infty$.

Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus die PAC-Lernbarkeit nachweist. Sie können dazu den Beweis aus der Vorlesung modifizieren und gegebenenfalls erweitern.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Zwei Punktmengen im $\mathbb{R}^2$ sind durch eine Gerade separierbar, wenn alle Punkte der einen Menge unterhalb der Gerade liegen und alle Punkte der anderen Menge oberhalb der Geraden liegen. Gleiches gilt in Bezug auf Ebenen im $\mathbb{R}^3$.

Gegeben seien vier Punkte $x_1, ..., x_4 \in \mathbb{R}^2$ mit
$x_1 = (-1, -1), x_2 = (-1, +1), x_3 = (+1, -1), x_4 = (+1, +1)$.

(a) Gibt es eine Unterteilung dieser Punkte in zwei disjunkte Mengen P und Q, sodass die Mengen nicht durch eine Gerade separiert werden können?

(b) Betrachte die Menge

$$S := \{(+1, +1, z_1), (+1, -1, z_2), (-1, +1, z_3), (-1, -1, z_4)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Können Sie z_1 bis z_4 so aus $\{+1, -1\}$ wählen, dass jede Unterteilung von S in zwei disjunkte Mengen P und Q nun durch eine Ebene separiert werden kann?

Begründen Sie ihre Antworten.