Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2020

Abgabe: 15.06.2018, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 25

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt, David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1: Entscheidungs- vs. Optimierungsvariante

Wir betrachten das Problem `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von `VERTEX COVER` soll für eine zusätzlich gegebene Zahl $k \leq |V|$ entschieden werden, ob es eine höchstens k-elementige Teilmenge X der Knotenmenge V gibt, sodass jede Kante von G mit mindestens einem Knoten aus X inzident ist. Eine solche Menge heißt *Vertex Cover* von G.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `VERTEX COVER` soll ein minimales Vertex Cover von G bestimmt werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `VERTEX COVER` in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von `VERTEX COVER` in P liegt.

Aufgabe 8.2: 2-SAT $\in P$

Für eine gegebene aussagenlogische Formel $\alpha = k_1 \wedge \dots \wedge k_\ell$ vom Grad ≤ 2 über m Variablen $x_1, \dots, x_m$ konstruieren wir den gerichteten Graphen $G^\alpha = (V, E)$ wie folgt.

Für jede Variable $x_i, 1 \leq i \leq m$, enthält V je einen Knoten x_i und einen Knoten $\neg x_i$. Weiterhin enthält E genau dann eine gerichtete Kante (v, w), wenn es in α eine zu $v \Rightarrow w$ äquivalente Klausel gilt.

Hinweis: Eine Klausel $(x \vee y)$ ist zu $\neg x \Rightarrow y$ und zu $\neg y \Rightarrow x$ äquivalent, wohingegen eine Klausel (x) bzw. $(x \vee x)$ zu $\neg x \Rightarrow x$ äquivalent ist.

- Zeigen Sie: Wenn G^α einen gerichteten Kreis K enthält mit $x_i \in K$ und $\neg x_i \in K$ für ein $i, 1 \leq i \leq m$, dann ist α unerfüllbar.
- Benutzen Sie vollständige Induktion über m um zu zeigen, dass wenn α unerfüllbar ist G^α einen gerichteten Kreis K enthält, mit $x_i \in K$ und $\neg x_i \in K$ für ein $i, 1 \leq i \leq m$.

Folgern Sie aus den obigen Aussagen, dass `2-SAT` in P liegt.

Aufgabe 8.3:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Menge $X \subseteq V$ heißt *Dominating Set* von G, wenn jeder Knoten von G in X liegt oder adjazent zu einem Knoten aus X ist. Bei der *Entscheidungsvariante* von `DOMINATING SET` soll für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene natürliche Zahl k entschieden werden, ob G ein Dominating Set mit höchstens k Knoten besitzt.

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvariante von `3-SAT` polynomiell auf die Entscheidungsvariante von `DOMINATING SET` reduzieren lässt.

Aufgabe 8.4: Probleme in *NP*

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in *NP* liegen. Beschreiben Sie dazu Programm und Laufzeit einer nichtdeterministischen Turingmaschine N, die die jeweilige Sprache entscheidet.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist binäre Kodierung einer Zahl } k \in \mathbb{N} \text{ und } k \text{ ist keine Primzahl.}\}$

(b) $L_2 = \left\{ x \in \{0,1,\#\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} x \text{ ist gültige Kodierung einer Menge } M \text{ aus } n \text{ natürlichen Zah-} \\ \text{len und die Entscheidungsvariante von } \texttt{PARTITION} \text{ wird für } M \text{ als} \\ \text{„Wahr“ entschieden.} \end{array} \right\}$