Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2020

Abgabe: 06.07.2020, 12.00 Uhr
Besprechung: KW 28

Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt, David Kübel
Institut für Informatik

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1:

Wir betrachten das *Problem des Handlungsreisenden* `TSP` (Travelling Salesman Problem). Eine Eingabe für das `TSP` ist ein vollständiger ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 3$ Knoten und einer Kantengewichtung $w : E \to \mathbb{R}_+$. Bei der Entscheidungsvariante des `TSP` stellen wir die Frage, ob für einen gegebenen Wert $t \in \mathbb{R}_+$ ein Hamiltonkreis T in G existiert, dessen Gewicht $\sum_{e \in E(T)} w(e)$ höchstens t ist. Zeigen Sie, dass die Entscheidungsvariante des `TSP` NP-vollständig ist.

Aufgabe 11.2:

Für eine Marsmission werden Experten für n Fachgebiete (Astronomie, Geologie, Technik, Physik, Informatik, Biologie, ...) benötigt. Es stehen m Freiwillige zur Verfügung. Für jede Person ist bekannt, auf welchen dieser Gebiete sie Experte ist. Die Aufgabe ist es, eine Besatzung aus möglichst wenigen Personen zusammenzustellen, sodass es für jedes Fachgebiet mindestens einen Experten gibt.

Geben Sie eine mengentheoretische Formalisierung der Entscheidungsvariante von `MISSION TO MARS` an und zeigen Sie, dass das Problem NP-vollständig ist.

Hinweis: Zum Beweis der NP-Vollständigkeit genügt es, eine polynomielle Reduktion eines bekannten NP-vollständigen Problems auf `MISSION TO MARS` anzugeben.

Aufgabe 11.3:

(a) Zeigen Sie, dass in Bäumen mit $|V| \geq 3$ immer ein optimales Vertex Cover existiert, das keine Blätter enthält.

(b) Sei $G = (V, E)$ ein Baum. Geben Sie einen Algorithmus an, der ein optimales Vertex Cover für G in Laufzeit $O(|V|)$ berechnet, und beweisen Sie dessen Korrektheit.

Aufgabe 11.4:

Wir betrachten die Optimierungsvariante des Problems `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. In der (funktionalen) Optimierungsvariante soll eine Teilmenge $T \subseteq V$ minimaler Kardinalität berechnet werden, sodass für jede Kante von G mindestens einer der inzidenten Knoten in T liegt.

`APPROX-VERTEX-COVER`(G)
$T = \emptyset$
$E' = G.E$ (kopiere Kantenmenge E von G)
while $E' \neq \emptyset$
    Wähle beliebige Kante (u, v) aus E'
    $T = T \cup \{u, v\}$
    Entferne aus E' alle zu u oder v inzidenten Kanten
end while
return T

(a) Geben Sie je ein Beispiel für einen Graphen G, für welchen `APPROX-VERTEX-COVER`(G) stets eine optimale bzw. suboptimale Lösung berechnet.

(b) Zeigen Sie, dass `APPROX-VERTEX-COVER`(G) in polynomieller Zeit eine Vertex Cover V berechnet, welches höchstens doppelt so viele Knoten wie ein optimales `VERTEX COVER` von G enthält (damit liefert der Algorithmus eine 2-Approximation).