Anne Driemel
Thomas Kesselheim
Xianghui Zhong

6. Juli 2020
Abgabe bis: 13. Juli 2020, 12 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2020

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Sei $\mathbb{S}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Betrachten Sie die Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen $f_{\mathbf{u}} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{Z}$ definiert durch ein $\mathbf{u} \in \mathbb{S}^1$ als $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \operatorname{sign}\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}\rangle$. Betrachten Sie die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung über $\mathcal{F}$. Wir wählen einen Parameter θ gleichverteilt in $[0, 2\pi)$ und geben $f_{\mathbf{u}}$ mit $\mathbf{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ zurück. Sei $d : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abstandsfunktion definiert durch $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. Zeigen Sie, dass α, β, r und R existieren mit $r = R$ und $1 < \alpha \leq \beta < 1$, sodass die Klasse $\mathcal{F}$ (r, R, α, β)-lokalitätssensitiv bezüglich der Abstandsfunktion $d(\cdot, \cdot)$ und der betrachteten Verteilung ist.

Aufgabe 2: (3+2 Punkte)

Sei wieder $\mathbb{S}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Untersuchen Sie folgenden Abstandsfunktionen $d : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezüglich ihrer metrischen Eigenschaften. Zeigen Sie entweder, dass die Abstandsfunktion eine Metrik ist, oder geben Sie ein Beispiel das zeigt, dass mindestens eine der Eigenschaften einer Metrik verletzt wird.

(a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$

(b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $S = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die Zielfunktion

$$\phi(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}\|^2$$

für $\mathbf{c} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathbf{x}_i$ minimiert wird.

Aufgabe 4: (3+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass Lloyds Algorithmus terminiert.

(a) Zeigen Sie, dass der Wert der Zielfunktion in jedem Schritt, in dem der Algorithmus nicht terminiert, kleiner wird.

(b) Argumentieren Sie mithilfe (a), dass der Algorithmus nach spätestens k^m Durchläufen der äußeren Schleife terminiert.