Anne Driemel
Thomas Kesselheim
Xianghui Zhong

29. Juni 2020
Abgabe bis: 6. Juli 2020, 12 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2020

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: (4+4+2 Punkte)

(a) Sei $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$. Zeigen Sie, dass das Voronoi-Diagramm der k-ten Ordnung von m Punkten in $\mathbb{R}$ aus genau $m - k + 1$ Voronoi-Regionen besteht.

(b) Sei $S = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\}$ eine Trainingsmenge aus $\mathbb{R} \times \{+1, -1\}$. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der nach geeigneter Vorverarbeitung der Menge S, für einen Punkt $q \in \mathbb{R}$ die k nächsten Nachbarn von q in S in $O(k \log m)$ Zeit deterministisch berechnet. Die Vorverarbeitung sollte dafür eine geeignete Datenstruktur auf der Menge S berechnen und darf beliebig viel Zeit kosten.

(c) Professor G. Witzt möchte den Algorithmus aus Teilaufgabe (b) für eine Trainingsmenge $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{-1, +1\}$ anwenden um die k nächsten Nachbarn für einen Punkt $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$ zu berechnen. Dazu berechnet er für jede Komponente $j \in \{1, 2\}$ eine separate Datenstruktur D_j auf der Menge $S_j = \{(x_{1,j}, y_1), \ldots, (x_{m,j}, y_m)\}$.

Nehmen Sie an, dass $k < \frac{m}{2} - 2$. Konstruieren Sie ein Beispiel für eine Menge S und einen Punkt q, sodass die Vereinigung der k nächsten Nachbarn von q_j in S_j für alle $j \in \{1, 2\}$ keinen Punkt aus der Menge der k nächsten Nachbarn von q in S enthält.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Voronoi-Diagramm der k-ten Ordnung von m Punkten in $\mathbb{R}^2$ aus höchstens $O(m^4)$ Voronoi-Regionen besteht. Sie können dafür die Beobachtung verwenden, dass die Bisektoren die Grundmenge in Regionen aufteilen, sodass in jeder Region die Permutation der nächsten Nachbarn gleich ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Voronoi-Diagramm der folgenden Punktmenge in $\mathbb{R}^3$ mindestens $(m-1)^2$ Voronoi-Knoten hat: $\{(\frac{i}{m}, 0, 0) \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{(0, 1, \frac{j}{m}) \mid j = 1, \ldots, m\}$.