Anne Driemel
Thomas Kesselheim
Xianghui Zhong

11. Mai 2020
Abgabe bis: 18. Mai 2020, 12 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2020

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: (3 Punkte)
Es seien S und S' zwei Mengen von jeweils m Samples unabhängig gezogen aus der gleichen Verteilung. Zeigen Sie mittels geschickter Anwendung der Hoeffding-Ungleichung, dass für jede Hypothese h gilt

$$\mathbf{Pr}\left[|err_S(h) - err_{S'}(h)| \geq \gamma\right] \leq 2\exp(-2m\gamma^2/4).$$

Aufgabe 2: (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine Hypothesenklassen, die nicht im realisierbaren Sinn PAC-lernbar ist, auch nicht im agnostischen Sinn PAC-lernbar ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Angenommen, wir haben einen Lernalgorithmus, der den Trainingsfehler nur approximativ minimiert. Das heißt, für alle Trainingsmengen S gilt $\mathrm{err}_S(h_S) \leq \min_{h \in \mathcal{H}} \mathrm{err}_S(h) + \gamma$ für ein festes $\gamma > 0$.
Zeigen Sie, dass für jede Wahl von $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, wenn S eine m-elementige Trainingsmenge aus einer Datenpunkt-/Label-Verteilung $\mathcal{D}$ gezogen ist mit

$$m \geq \frac{8}{\epsilon^2} \ln\left(\frac{4\Pi_{\mathcal{H}}(2m)}{\delta}\right) \quad .$$

dann gilt $\mathrm{err}_{\mathcal{D}}(h_S) \leq \min_{h' \in \mathcal{H}} \mathrm{err}_{\mathcal{D}}(h') + \epsilon + \gamma$ mit Wahrscheinlichkeit mindestens $1 - \delta$.

Aufgabe 4: (4+5 Punkte)
Bestimmen Sie die jeweils die VC-dimension der folgenden Mengensysteme. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort richtig ist.

(a) $\mathcal{R}$ besteht aus Halbräumen der Form $r = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \langle a, x \rangle \geq 1 \right\}$ und Halbräumen der Form $r = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \langle a, x \rangle \leq 1 \right\}$.

(b) $\mathcal{R}$ besteht aus Halbräumen der Form $r = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \langle a, x \rangle \geq 0 \right\}$.

Tipp: Nutzen Sie aus, dass $d+1$ Vektoren im $\mathbb{R}^d$ immer linear abhängig sind.

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Geben Sie ein Beispiel für einen Radonpunkt zweier disjunkter Teilmengen einer 5-elementigen Punktmenge im $\mathbb{R}^3$. Ihr Beispiel sollte keine 4 Punkte enthalten, die affin abhängig sind.