Anne Driemel
Thomas Kesselheim
Xianghui Zhong

4. Mai 2020
Abgabe bis: 11. Mai 2020, 12 Uhr

Algorithmische Grundlagen des Maschinellen Lernens

Sommersemester 2020

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: (3+3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ eine Hypothesenklasse mit Grundmenge $\mathcal{X}$. Das heisst, $\mathcal{H}$ ist eine Menge von Funktionen der Form $h\colon \mathcal{X} \to \{-1, +1\}$. Zeigen Sie, dass eine endliche Grundmenge $\mathcal{X}$ die PAC-Lernbarkeit von $\mathcal{H}$ impliziert.

(a) Betrachten Sie den realisierbaren Fall.

(b) Betrachten Sie den nicht-realisierbaren Fall.

Aufgabe 2: (3+3 Punkte)

Wir betrachten wieder die Hypothesenklasse $\mathcal{H}$ der Schwellenwertfunktionen. Betrachten Sie die folgenden Verteilungen $\mathcal{D}$ über Paare (x, y), wobei $x \in \mathbb{R}$ ein Datenpunkt ist und $y \in \{-1, +1\}$ das zugehörige Label. Bestimmen Sie jeweils ein Hypothese $h \in \mathcal{H}$, die den tatsächlichen Fehler $\mathrm{err}_{\mathcal{D}}(h)$ minimiert, und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(a) Ziehe x aus einer Exponentialverteilung mit Parameter 1. Setze $y = 1$, falls $x \in [a, b]$, für $a > 0$ und $b > a + 1$, sonst $y = -1$.

(b) Ziehe x uniform zufällig aus $[-2, 2]$. Bestimme anschließend y wie folgt: Wenn $x < 0$, setze $y = -1$; wenn $x > 1$, setze $y = +1$; anderenfalls setze $y = 1$ mit Wahrscheinlichkeit x^2 und $y = -1$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - x^2$.

Aufgabe 3: (3+3 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Funktionen $h\colon \mathbb{R} \to \{-1, +1\}$ der Form

(a) $h_a(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x \geq a \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $h_{a,b}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x \in [a, b] \\ -1 & \text{sonst} \end{cases}$

Entwerfen Sie jeweils einen Lernalgorithmus für das Lernen der Hypothesenklasse $\mathcal{H}$ im nicht-realisierbaren Fall. Ihr Lernalgorithmus sollte den Trainingsfehler minimieren und möglichst effizient sein. Nehmen Sie an, der Lernalgorithmus bekommt als Eingabe ein Sample $S = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)\}$. Analysieren Sie die Laufzeit in Abhängigkeit von m.

Aufgabe 4: (2 Punkte)

Betrachten Sie eine Urne mit n weißen und m schwarzen Kugeln, aus der zufällig ohne Zurücklegen gezogen wird. Sei die Wahrscheinlichkeit im zweiten Zug eine weiße Kugel zu ziehen gleich $\frac{1}{3}$. Was ist dann das Verhältnis von n und m?