Institut für Informatik
Prof. Dr. Heiko Röglin
Anna Großwendt

Online-Algorithmen
Sommersemester 2018

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Sei A ein r-kompetitiver Algorithmus für das k-Server-Problem auf einer beliebigen Metrik $\mathcal{M} = (M, d)$, der mit den Serverpositionen $(s_1, \ldots, s_k) \in M^k$ startet. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $s \in M^k$ ein r-kompetitiver Algorithmus A' existiert, der mit den Serverpositionen s startet.

Aufgabe 5.2

Für das k-Server-Problem auf der Linie haben wir verschiedene Aussagen über die optimale Zuordnung zweier Punktmengen verwendet. Seien $0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq 1$ und $0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_k \leq 1$ Punkte auf der Linie. Als Abstandsmaß betrachten wir die Standardmetrik $d(x, y) = |x - y|$. Die Zuordnung der Punkte y_j zu den Punkten x_i erfolgt durch eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_k$. Die Distanz beider Punktmengen bzgl. π ist dann $\delta_\pi = \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_{\pi(i)})$. Wir bezeichnen eine Zuordnung π^* als optimal, wenn $\delta_{\pi^*} = \min_{\pi \in \mathcal{S}_k} \delta_\pi$ gilt.

(a) Wir betrachten die identische Abbbildung π_{id}, gegeben durch $\pi_{\text{id}}(i) = i$. Zeigen Sie, dass π_{id} optimal ist.

(b) Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$ ein Index mit $y_j \leq x_1$. Zeigen Sie, dass es eine optimale Zuordnung π mit $\pi(1) = j$ gibt.

(c) Seien $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $j \in \{1, \ldots, k\}$ Indizes mit $x_i \leq y_j \leq x_{i+1}$. Zeigen Sie, dass es eine optimale Zuordnung π mit $\pi(i) = j$ oder $\pi(i+1) = j$ gibt.

Aufgabe 5.3

Für das k-Server Problem auf der Linie betrachten wir den folgenden randomisierten Online Algorithmus RAND. Sei σ_i die i-te Anfrage. Die Aktion von RAND ergebe sich aus der folgenden Fallunterscheidung.

(a) Falls es bereits einen Server auf Position σ_i gibt, ist nichts zu tun.

(b) Falls σ_i außerhalb der konvexen Hülle der Serverpositionen ist, bewege einen der nächsten Server zu der Position σ_i.

(c) Es bleibt der Fall, dass σ_i zwischen zwei Servern liegt. Seien s_1 und s_2 die nächstliegenden Server auf beiden Seiten von σ_i. Dann bewege sich der Server s_j (für $j \in \{1, 2\}$) zu σ_i mit Wahrscheinlichkeit

$$p_j = \frac{1/d(s_j, \sigma_i)}{1/d(s_1, \sigma_i) + 1/d(s_2, \sigma_i)}.$$

Zeigen Sie, dass RAND k-kompetitiv ist.

Hinweis: Verwenden Sie dieselbe Potentialfunktion wie bei der Analyse des DC-Algorithmus.

Aufgabe 5.4

Wir betrachten den DC-Algorithmus für das k-Server-Problem auf Bäumen. Seien $s_1, \ldots, s_m$ die Server, die sich innerhalb einer Phase zu einer Anfrage σ_i hinbewegen. Zeigen Sie, dass es für jeden Server $s \in \{s_{m+1}, \ldots, s_k\}$, genau einen Server $s' \in \{s_1, \ldots, s_m\}$ gibt, zu dem sich die Distanz $d(s, s')$ vergrößert. Zeigen Sie außerdem, dass sich für jedes Paar von Servern $s, s' \in \{s_1, \ldots, s_m\}$ mit $s \neq s'$ die Distanz $d(s, s')$ verringert.