Abgabe: 28.06.2017, 12:30 Uhr
Besprechung: KW 27

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1: (2 + 2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie jeweils mithilfe eines Polynomialzeitverifizierers, dass die folgenden Entscheidungsprobleme in NP sind. Beschreiben Sie dazu die Kodierung und die Länge des Zertifikats sowie die Arbeitsweise des Verifizierers.

(a) $\text{MST} = \left\{ \text{code}(G)\#\text{code}(w)\#\text{bin}(c) : \begin{array}{l} G \text{ ist ein ungerichteter Graph mit Kantengewichtung } w \\ \text{und besitzt einen Spannbaum } T \text{ mit } w(T) \geq c,\ c \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$,

(b) $\text{COMPOSITE} = \{\text{bin}(k) : k \in \mathbb{N} \text{ und } k \text{ ist } \textbf{keine} \text{ Primzahl}\}$,

(c) $\text{GRAPHISOMORPHIE} = \left\{ \text{code}(G_1)\#\text{code}(G_2) : \begin{array}{l} G_1, G_2 \text{ sind gerichtete Graphen} \\ \text{und } G_1 \text{ ist isomorph zu } G_2 \end{array} \right\}$.

Ein gerichteter Graph $G_1 = (V, E_1)$ heißt *isomorph* zu einem gerichteten Graphen $G_2 = (V, E_2)$, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon V \to V$ gibt, sodass für alle Knoten $u, v \in V$ gilt:

$$(u, v) \in E_1 \iff (f(u), f(v)) \in E_2\,.$$

Isomorphe Graphen sind also bis auf die Bezeichnung ihrer Knoten identisch.

Aufgabe 9.2: (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass wir NP über Verifizierer charakterisieren können. Ein Verifizierer arbeitet dabei auf Wörtern $x\#y$, wobei x die Eingabe und y ein beliebiges Zertifikat ist, dessen Länge polynomiell in $|x|$ beschränkt ist. Was können wir über Probleme aussagen, für die ein Verifizierer existiert, der auch auf Wörtern $x\#y$ arbeitet, wobei x wieder die Eingabe und y wieder ein Zertifikat ist, dessen Länge allerdings linear in $\log(|x|)$ beschränkt ist?

Aufgabe 9.3: (6 Punkte)

Wir betrachten das Problem `3-SAT`. `3-SAT` ist eine Variante des Erfüllbarkeitsproblems (Satisfiability `- SAT`). Eine Eingabe von `SAT` ist eine aussagenlogische Formel ϕ in konjunktiver Normalform (KNF).
Eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF) besteht aus $\wedge$-verknüpften Klauseln, die wiederum aus $\vee$-verknüpften Literalen bestehen. Ein Literal entspricht dabei einer Variablen x_i oder ihrer Negierung $\bar{x}_i$.
Eine Belegung weist jeder Variable x_i einen Wert zu, entweder 1 für wahr oder 0 für falsch. Ein nicht negiertes Literal ist erfüllt, wenn die zugehörige Variable den Wert 1 hat, und ein negiertes Literal ist erfüllt, wenn die zugehörige Variable den Wert 0 hat. Eine Klausel ist erfüllt, wenn sie mindestens ein erfülltes Literal enthält. Die Formel ist erfüllt, wenn alle ihre Klauseln erfüllt sind.
Bei einer Eingabe von `3-SAT` fordern wir zusätzlich noch, das jede Klausel aus 3 $\vee$-verknüpften Literalen besteht. Gefragt ist in beiden Fällen, ob eine Belegung der Variablen x_i existiert, die die Formel ϕ erfüllt. Eine solche Belegung heißt erfüllende Belegung.

Zeigen Sie `3-SAT` $\leq_p$ `CLIQUE` (Cliquenproblem).

Aufgabe 9.4: (6 Punkte)

Zeigen Sie `SAT` $\leq_p$ `3-SAT`.
Hinweis: Zeigen Sie, wie eine Formel für `SAT` in eine äquivalente Formel von `3-SAT` umgewandelt werden kann.