**Abgabe: 21.06.2017, 12:30 Uhr**
**Besprechung: KW 26**

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
*Institut für Informatik*

# Übungsblatt 8

## Aufgabe 8.1: (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Analog zum in der Vorlesung eingeführten Reduktionskonzept betrachten wir nun das Konzept der polynomiellen Reduktion: Eine Sprache $L_1$ heißt *polynomiell reduzierbar auf* eine Sprache $L_2$, kurz $L_1 \leq_p L_2$, wenn eine **in Polynomialzeit** berechenbare Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ existiert, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2\,.$$

Wir betrachten zwei Sprachen $L_1$ und $L_2$. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort. Beachten Sie, dass „ja“, „nein“ und „keine Aussage möglich“ als Antworten in Frage kommen.

Für (a) bis (c) nehmen wir an, dass $L_1 \leq L_2$ gilt.

(a) Wenn $L_2$ in P liegt, liegt dann $L_1$ in P?

(b) Wenn $L_1$ nicht entscheidbar ist, liegt dann $L_2$ in P?

(c) Wenn $L_1$ in P liegt, ist dann $L_2$ entscheidbar?

Für (d) bis (f) nehmen wir an, dass $L_1 \leq_p L_2$ gilt.

(d) Wenn $L_2$ in P liegt, liegt dann $L_1$ in P?

(e) Wenn $L_1$ nicht in P liegt, ist dann $L_2$ entscheidbar?

(f) Wenn $L_1$ nicht entscheidbar ist, ist dann $L_2$ entscheidbar?

## Aufgabe 8.2: (6 Punkte)

Wir betrachten das Problem PARTITION. Eingabe hierfür sind natürliche Zahlen $b_1, \ldots, b_n$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von PARTITION soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge $I_1$ der Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass gilt: $\sum_{i \in I_1} b_i = \sum_{i \in I_2} b_i$, wobei $I_2 = I \setminus I_1$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von PARTITION soll eine solche Partition $(I_1, I_2)$ von $I$ ausgegeben werden, falls sie existiert. Ansonsten soll „Nein“ ausgegeben werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von PARTITION in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von PARTITION in $\mathcal{P}$ liegt.

## Aufgabe 8.3: (6 Punkte)

Wir betrachten das Problem `VERTEX COVER`. Eingabe hierfür ist ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$.

- Bei der *Entscheidungsvariante* von `VERTEX COVER` soll für eine zusätzlich gegebene Zahl $k \leq |V|$ entschieden werden, ob es eine höchstens $k$-elementige Teilmenge $X$ der Knotenmenge $V$ gibt, sodass jede Kante von $G$ mit mindestens einem Knoten aus $X$ inzident ist. Eine solche Menge heißt *Vertex Cover* von $G$.
- Bei der *Optimierungsvariante* von `VERTEX COVER` soll ein minimales Vertex Cover von $G$ bestimmt werden.

Zeigen Sie, dass die Optimierungsvariante von `VERTEX COVER` in polynomieller Zeit gelöst werden kann, wenn die Entscheidungsvariante von `VERTEX COVER` in $\mathcal{P}$ liegt.

## Aufgabe 8.4: (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich die Entscheidungsvarianten von `VERTEX COVER` und des Cliquenproblems jeweils polynomiell aufeinander reduzieren lassen.