Algorithmen und
Berechnungskomplexität II
Sommersemester 2017

Abgabe: 26.04.2017
Besprechung: KW 18

Prof. Dr. Heiko Röglin
Clemens Rösner
Institut für Informatik

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1: (3 + 3 Punkte)

Geben Sie die formale Darstellung der Sprache für die nachfolgenden Entscheidungsprobleme an. Machen Sie sich dabei insbesondere Gedanken zur Kodierung der Eingabe, zur Eingabelänge und zur Alphabetgröße.

(a) Ein Hamiltonpfad in einem gerichteten Graphen G ist ein gerichteter Weg in G, in dem jeder Knoten von G genau einmal vorkommt. Die Sprache des Hamiltonpfad-Problems L_{Hamilton} enthält alle gerichteten Graphen, die mindestens einen Hamiltonpfad besitzen.

(b) Das Subset-Sum-Problem erhält als Eingabe eine Menge M von natürlichen Zahlen und eine natürliche Zahl b. Die Sprache $L_{\text{Subset-Sum}}$ beinhaltet alle Paare (M, b), für die es eine Teilmenge $S \subseteq M$ mit $\sum_{s \in S} s = b$ gibt.

Aufgabe 1.2: (6 Punkte)

Wir betrachten die Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, q_0, \bar{q}, \delta)$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, \bar{q}\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$ und der Zustandsübergangsfunktion δ, gegeben durch folgende Tabelle:

	0	1	$\square$
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_1, \square, L)$
q_1	$(q_2, \square, R)$	$(q_3, \square, R)$	$(\bar{q}, \square, R)$
q_2	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, 0, L)$
q_3	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 1, L)$
q_4	$(q_4, 1, L)$	$(q_4, 0, L)$	$(q_1, \square, L)$

Beschreiben Sie das Verhalten von M auf einer beliebigen Eingabe $w \in \{0, 1\}^*$. Erläutern Sie kurz die Bedeutung der einzelnen Zustände. Gibt es Einträge in der Tabelle, die nur der Vollständigkeit halber existieren und nie benötigt werden?

Aufgabe 1.3: (6 Punkte)

Es soll eine Turingmaschine über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und dem Bandalphabet $\Gamma = \Sigma \cup \{\square\}$ konstruiert werden, die die Sprache $L = \left\{ww^R : w \in \Sigma^*\right\}$ entscheidet. Dabei sei $w^R = \varepsilon$ für $w = \varepsilon$ und $w^R = w_n \dots w_1$ für $w = w_1 \dots w_n$. Beschreiben Sie zunächst die benötigten Zustände und die Vorgehensweise in den einzelnen Zuständen. Geben Sie dann die Zustandsübergangsfunktion in Form einer Tabelle an.

Hinweis: Die Eingabe kann bei Bedarf überschrieben werden.

Aufgabe 1.4: (3 + 3 Punkte)

(a) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \square, q_0, \bar{q}, \delta)$ eine Turingmaschine, deren Speicherplatzbedarf für eine Eingabe der Länge n maximal $s(n)$ beträgt. Zeigen Sie, dass falls M auf einer Eingabe w der Länge n hält, dann spätestens nach $(|Q| - 1) \cdot |\Gamma|^{s(n)} \cdot s(n) + 1$ Schritten.

(b) Gegeben sei eine Turingmaschine M mit Laufzeitschranke $t(n)$, die eine Sprache L entscheidet. Unser Ziel ist es, eine Turingmaschine M' mit Laufzeitschranke $O(t(n))$ zu konstruieren, die die Sprache L entscheidet und ein einseitig beschränktes Band besitzt: Die Eingabe sei links von einem Trennzeichen # und rechts vom Leerzeichen $\square$ begrenzt. Der Schreib-Lese-Kopf von M' darf nie links vom Trennzeichen # stehen. Beschreiben Sie in Worten, wie man M' aus M konstruieren kann.

Hinweis: Das Bandalphabet $\Gamma' \supseteq \Gamma$ von M' darf größer sein als das von M.