Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Übungsblatt 4
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 4.11.2014, bis 10:15 Uhr — Besprechung: KW 46

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

Aufgabe 1: Äquivalenzrelationen und Abbildungen 1+1+2 Punkte

Seien A, B nichtleere Mengen. Zeigen Sie:

a) Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung von A nach B, so wird durch

$$\forall a_1, a_2 \in A : \ (a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow f(a_1) = f(a_2))$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A definiert.

b) Ist $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf A und ist $C = \{[\![a]\!]_\sim \mid a \in A\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$, so gibt es eine Abbildung $p : A \longrightarrow C$, so dass für alle $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow p(a_1) = p(a_2)$$

c) Seien $\sim$ und C wie in Aufgabenteil **b)**. Ist $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und gilt

$$\forall a_1, a_2 \in A : \ (a_1 \sim a_2 \Longrightarrow f(a_1) = f(a_2))$$

so wird durch $g([\![a]\!]_\sim) = f(a)$ für alle $a \in A$ eine Abbildung $g : C \longrightarrow B$ definiert.

Bitte wenden

Aufgabe 2: **Äquivalenzklassen** 2+2 Punkte

a) Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen aus Aufgabe 2.a) und 2.c) vom Übungsblatt 3 die Äquivalenzklassen.

b) Bestimmen Sie die folgenden Äquivalenzklassen. Vereinfachen Sie die Schreibweise dabei so weit wie möglich. Schreiben Sie zum Beispiel $[\![1]\!]$ statt $[\![7]\!]$ für die Äquivalenzklasse $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$ der Relation $\equiv_3$.

(i) $[\![42]\!] \oplus_{47} [\![276]\!]$

(ii) $[\![7]\!] \odot_{11} [\![19]\!]$

Aufgabe 3: **Reguläre Grammatiken** 2+2 Punkte

Geben Sie reguläre Grammatiken für die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an:

a) Die Sprache aller Wörter, die maximal viermal die 1 enthalten.

b) Die Sprache aller Wörter, bei denen keine zwei 0 hintereinanderstehen.

Vergessen Sie nicht, jeweils alle vier Komponenten zu definieren.

Aufgabe 4: **DFAs** 2+2 Punkte

Geben Sie für die Sprachen in 3.a) und 3.b) jeweils einen DFA an. Auch hier bitte alle Komponenten angeben. Es genügt, für die Zustandsüberführungsfunktion einen Übergangsgraphen anzugeben.
Bedenken Sie, dass $\delta\colon Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ eine Funktion ist, also *jedes* Tupel aus $Q \times \Sigma$ auf einen Zustand abbildet.